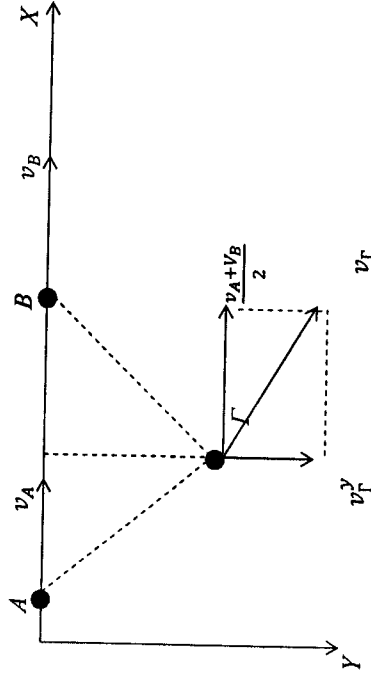


Задача 1 (12 баллов)

Автобус, велосипедист и грузовик в каждый момент времени образуют равнобедренный треугольник, основание которого лежит на дороге, по которой едут автобус и велосипедист. (см. рис.) (2 балла)



Направим ось X вдоль этой дороги в направлении движения автобуса и велосипедиста, а ось Y — перпендикулярно к ней. Тогда законы движения транспортных средств имеют вид:

$$\text{Для автобуса } x_A(t) = x_A^0 + v_A t, \quad y_A(t) = 0 \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Для велосипедиста } x_B(t) = x_B^0 + v_B t, \quad y_B(t) = 0; \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Для грузовика } x_\Gamma(t) = \frac{x_A^0 + x_B^0}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} t, \quad y_\Gamma(t) = y_\Gamma^0 + v_\Gamma^y t; \quad (2 \text{ балла})$$

Здесь верхними индексами «0» снабжены начальные координаты и скорости, буквами A, B, Γ обозначены величины, относящиеся к автобусу, велосипедисту и грузовику соответственно, а v_Γ^y — проекция скорости грузовика на ось Y . Заметим, что выражение для $x_\Gamma(t)$ получается из тех соображений, что грузовик все время находится в вершине равнобедренного треугольника, противоположной его основанию. Из этого, в частности, следует, что проекция скорости грузовика на ось X равна $\frac{v_A + v_B}{2}$. Из условия задачи нам известен модуль скорости грузовика v_Γ , которая связана со своими компонентами формулой $v_\Gamma^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + (v_\Gamma^y)^2 \Rightarrow v_\Gamma^y =$

$$\sqrt{v_\Gamma^2 - \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2}. \quad (2 \text{ балла})$$

Теперь мы знаем обе компоненты скорости грузовика. По теореме Пифагора найдем скорость грузовика относительно автобуса:

$$v_{\text{отн}}^2 = \left(v_A - \frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + (v_\Gamma^y)^2, \quad (2 \text{ балла})$$

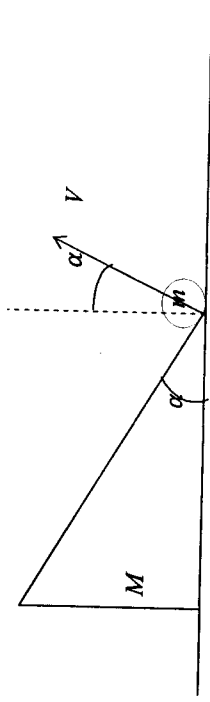
откуда с учетом выражения для v_Γ^y находим

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_\Gamma^2 - v_A \cdot v_B} = 25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}. \quad (2 \text{ балла})$$

Всего 12 баллов

Задача 2 (12 баллов)

Поскольку трения нет, то во время столкновения шара с клином на шар со стороны клина действует сила, перпендикулярная поверхности клина, т.е. шар приобретает скорость под углом α углом к вертикали (см. рис.). (2 балла)



Найдем скорости шара V и клина v' после столкновения, для чего запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекции на ось x

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mv'^2}{2} \quad (1)$$

$$Mv = mv \sin \alpha + Mv' \quad (2)$$

(1 балл)

(1 балл)

Из (2) находим $v' = v - \frac{m}{M} V \sin \alpha$.

Подставляя это выражение в (1), получаем

$$V = \frac{2v \sin \alpha}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha}.$$

(1 балл)

Зная скорость шара, определяем скорость клина, используя ранее полученное выражение

$$v' = v \left(\frac{1 - \frac{m}{M} \sin^2 \alpha}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha} \right).$$

(1 балл)

Найдем составляющие U_x и U_y скорости шара относительно клина:

$$U_y = V_y = V \cos \alpha = \frac{2v \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha},$$

(1 балл)

$$U_x = V_x - v' = v \frac{(2 + \frac{m}{M}) \sin^2 \alpha - 1}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha}.$$

(1 балл)

При $M = \frac{m}{2}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ скорость $U_x = 0$, т.е. шар относительно клина движется вертикально вверх. (1 балл)

Искомое время $t_0 = \frac{2U_y}{g}$. (1 балл)

Так как $U_y = \frac{v}{\sqrt{3}}$, то $t_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v}{g} \approx 0,6$ с. (1 балл)

Всего 12 баллов

Задача 3 (8 баллов)

Для первого случая: $I_1 = \frac{U}{R + R_0}$ (1 балл)

$I_1^2 R = k(t_1 - t_0)$, где k - коэффициент пропорциональности (1 балл)

Следовательно, $\frac{U^2}{(R + R_0)^2} R = k(t_1 - t_0)$. (1 балл)

Аналогично для второго случая:

$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{U}{R + \frac{R}{2}} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{и} \quad \frac{U^2}{4(R_0 + \frac{R}{2})^2} R = k(t_2 - t_0) \quad (2 \text{ балла})$$

Разделив (2) на (1), получим

$$t_2 - t_0 = (t_1 - t_0) \frac{(R_0 + R)^2}{4(R_0 + \frac{R}{2})^2} = 18^\circ \text{C}. \quad \text{Таким образом, } t_2 = 38^\circ \text{C}. \quad (2 \text{ балла})$$

Всего 8 баллов

Задача 4 (14 баллов)

Для того, чтобы сообщить определённое количество теплоты дому и одновременно перевести в парообразное состояние некоторое количество воды, которая содержится в мокрых дровах, требуется сжечь мокрых дров больше, чем сухих. Из трубы дым выходит с температурой, несколько превышающей 100°C . Для простоты примем температуру на улице равной 0°C , а температуру выходящего дыма равной 100°C . Тогда при сжигании массы $m_0 = 1$ кг мокрых дров нагревается на $\Delta T = 100^\circ \text{C}$ и испаряется масса воды $m = m_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{7}$ кг (3 балла)

При этом сгорает сухая древесина массой

$$M = m_0 - m = m_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6}{7} \text{ кг}. \quad (1 \text{ балл})$$

На нагревание и испарение массы воды m затрачивается количество теплоты

$$Q_1 = m(c\Delta T + L) = m_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} (c\Delta T + L) \approx 0,39 \cdot 10^6 \text{ Дж}. \quad (2 \text{ балла})$$

При сгорании массы M древесины выделяется количество теплоты

$$Q_2 = Mq = m_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} q \approx 8,57 \cdot 10^6 \text{ Дж} \quad (1 \text{ балл})$$

На отопление дома при сгорании массы $m_0 = 1$ кг мокрых дров уходит количество теплоты

$$Q_3 = Q_2 - Q_1 = m_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} q - m_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} (c\Delta T + L) = \frac{m_0}{\rho_2} (\rho_1 q - (\rho_2 - \rho_1)(c\Delta T + L)) \approx 8,18 \cdot 10^6 \text{ Дж}, \quad (2 \text{ балла})$$

то есть удельная теплота сгорания мокрых дров равна $q_3 = \frac{Q_3}{m_0} \approx 8,18 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. (1 балл)

Поэтому для того, чтобы протопить дом, потребуется либо масса $M_1 = 20$ кг сухих дров, либо масса мокрых дров $M_2 = \frac{M_1 q}{q_3} = \frac{M_1 \rho_2}{\rho_1 q - (\rho_2 - \rho_1)(c\Delta T + L)} \approx 24,5 \text{ кг}$. (4 балла)

Всего 14 баллов

Задача 5 (14 баллов)

Весь газ перетечет в сосуд 2. Закон сохранения энергии (первый закон термодинамики) можно записать в виде $\frac{3}{2} \nu R(T - T_0) = MgH_0 - m \cdot gH + \frac{\nu \mu g}{2} (H_0 - H)$. (4 балла)

До открытия крана (в левом сосуде) $p_0 = \frac{Mg}{S}$; $V_0 = SH_0$ (2 балла)

Тогда уравнение Менделеева-Клапейрона запишется в виде

$$MgH_0 = \nu RT_0 \Rightarrow gH_0 = \frac{\nu}{M} RT_0. \quad (2 \text{ балла})$$

После открытия крана $gH = \frac{\nu}{m} RT$. (2 балла)

Подставляя это выражение в закон сохранения энергии, получим $\frac{3}{2} \nu R(T - T_0) = \nu R(T_0 - T) + \frac{\nu \mu}{2} \left(\frac{\nu}{M} RT_0 - \frac{\nu}{m} RT \right) \Rightarrow T = T_0 \frac{1 + \frac{5\mu M}{2m}}{1 + \frac{5\mu}{2m}} = 0,98T_0$. (4 балла)

Всего 14 баллов